$U_{(x;y)} = x + y^2$.

(1) Equation de la Courbe d'Indifférence.

$U_{(x;y)} = U_0$ et déduire y en fonction de U_0 et x

$U_{(x;y)} = x + y^2 \Rightarrow x + y^2 = U_0 \Rightarrow y^2 = U_0 - x \Rightarrow y = (U_0 - x)^{\frac{1}{2}}$

d'où l'Équation de la Courbe d'Indifférence : $\boxed{(ECI) : y = (U_0 - x)^{1/2}}$

(2) Démonstration : (ECI) ↘

ECI est décroissante si et seulement si la dérivée de cette équation est inférieure à zéro

$(ECI)' < 0$ ou $y' < 0$

$(ECI) : y = (U_0 - x)^{1/2} \Rightarrow y' = \left[(\underbrace{U_0 - x}_{a})^{1/2} \right]'$

$y' = (a^n)'$

$\Rightarrow (a^n)' = n a' a^{n-1}$

$$y' = n\, a'\, a^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} (U_0 - x)' \cdot (U_0 - x)^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[U_0' - x' \right] \cdot \left[(U_0 - x)^{\frac{1}{2} - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[0 - 1 \right] \cdot \left[(U_0 - x)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-1 \right] \left[(U_0 - x)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(U_0 - x)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$y' = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2} < 0}\left[\underbrace{(U_0 - x)^{-\frac{1}{2}}}_{> 0}\right]$$

$-$ donc $y' < 0$ d'où l'équation est décroissante.